ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ – Μέρος Δ΄

Καθ. Π. Κάπρος
ΕΜΠ 2012

Μεγιστοποίηση Κέρδους Μονοπωλίου

Συνάρτηση Εσόδου $R = pq = \mathrm{P}(q)$ δεδομένου ότι η τιμή και η ποσότητα συνδέονται μεταξύ τους μέσω της αθροιστικής συνάρτησης ζήτησης $q = D(p)$

Συνάρτηση Κόστους $C = \Phi(q)$ που είναι αποτέλεσμα της βέλτιστης επιλογής τεχνολογίας (ποσοτήτων συντελεστών παραγωγής) για το επίπεδο παραγωγής q

Μεγιστοποίηση κέρδους:

$$Max_q \quad \pi = \mathrm{P}(q) - \Phi(q) \Rightarrow \frac{\partial \pi}{\partial q} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathrm{P}(q)}{\partial q} = \frac{\partial \Phi(q)}{\partial q} \Rightarrow MR = MC$$

$$MR = \frac{\partial \mathrm{P}(q)}{\partial q} = p + q\frac{\partial p}{\partial q} = p + q\frac{1}{\partial D(p)/\partial p} = p + p\left[\frac{\partial p/p}{\partial D(p)/q}\right]^{-1} \Rightarrow$$

$$MR = p\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) = MC$$

Αντίθετα στον ανταγωνισμό $MR = p = MC$

Ατελής Ανταγωνισμός

- Υποθέτουμε αγορά για ένα αγαθό στην οποία δραστηριοποιούνται ν επιχειρήσεις
- Οι καταναλωτές είναι πολλοί, η αθροιστική καμπύλη ζήτησης είναι φθίνουσα ως προς την τιμή και η αντίστροφη αθροιστική συνάρτηση ζήτησης προσδιορίζει την τιμή απορρόφησης της συνολικής παραγωγής των ν επιχειρήσεων.
- Κάθε επιχείρηση επιδιώκει τη μεγιστοποίηση του κέρδους της δεδομένης της καμπύλης ζήτησης και της συνάρτησης κόστους της παραγωγής της.
- Οι διάφορες περιπτώσεις ατελούς ανταγωνισμού προκύπτουν ανάλογα με την υπόθεση σχετικά με το ποιους παράγοντες θεωρεί μία επιχείρηση ότι παραμένουν σταθεροί ή σχετικά με το πώς αυτοί μεταβάλλονται όταν μία επιχείρηση λύνει το πρόβλημα απόφασής της που αφορά στη μεγιστοποίηση του κέρδους της.

$$P = \Pi(q), \qquad q = q_1 + q_2 + \ldots + q_\nu$$

$$\forall i = 1, \ldots, \nu$$

$$\underset{q_i}{Max} \quad \pi_i = \Pi(q) \cdot q_i - \Phi(q_i) = \Pi(q_1 + q_2 + \ldots + q_\nu) \cdot q_i - \Phi(q_i)$$

Ταξινόμηση περιπτώσεων

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_i} = 0 \Leftrightarrow \Pi(q_1 + \ldots + q_\nu) + q_i \sum_{j=1}^{\nu} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial q_j}{\partial q_i} \right) - \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} = 0$$

- Cournot: δεδομένη η παραγωγή των άλλων επιχειρήσεων
- Bertrand: δεδομένες οι τιμές προσφοράς των άλλων επιχειρήσεων
- Stackelberg: μία από τις επιχειρήσεις (ηγέτης) δρα ως μονοπώλιο με δεδομένες όμως τις συναρτήσεις προσφοράς των άλλων (ακόλουθοι) οι οποίες όμως δρουν ανταγωνιστικά
- Υποθετικές Μεταβολές: μεικτή κατάσταση στην οποία κάθε επιχείρηση κάνει υποθέσεις για την αντίδραση των άλλων στην προσφορά της
- Καρτέλ: οι επιχειρήσει συνεννοούνται μεταξύ τους και δρώντας συνεργατικά μεγιστοποιούν από κοινού το κέρδος τους
- Μονοπωλιακός ανταγωνισμός: κάθε επιχείρηση παράγει μία παραλλαγή του αγαθού για την οποία δρα μονοπωλιακά, όμως οι καταναλωτές μπορούν εύκολα να υποκαταστήσουν μία παραλλαγή του αγαθού με μία άλλη.

Καρτέλ – συνεργατική λύση

$$Max \quad \pi = \Pi(q_1+\ldots+q_\nu)\cdot(q_1+\ldots+q_\nu)-\sum_i \Phi_i(q_i), \quad q=\sum_i q_i$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial q}=0 \Leftrightarrow \Pi(q)+q\frac{\partial \Pi}{\partial q}-\frac{\partial \sum_i \Phi_i(q_i)}{\partial q}=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Find} \quad q \quad \text{from above equation and then } P=\Pi(q) \\ \text{Find} \quad q_i \quad \text{from} \begin{cases} Min & \sum_i \Phi_i(q_i) \\ st. & \sum_i q_i = q \end{cases} \quad \text{or } \dfrac{\partial \Phi_i}{\partial q_i}=\dfrac{\partial \Phi_j}{\partial q_j}=\ldots=P \end{cases}$$

Linear Case

If $\quad P=a-bq \quad$ then $\quad \dfrac{\partial \Pi}{\partial q}=-b$

If all firms are identical and if $\quad MC_i=c \quad$ then $\quad P=c+bq$

$$\text{Therefore } a-bq=c+bq \Rightarrow \begin{cases} q=\dfrac{a-c}{2b} \\ P=\dfrac{a+c}{2} \end{cases}$$

Cournot

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_i}=0 \Leftrightarrow \Pi(q_1+\ldots+q_\nu)+q_i\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}\sum_{j=1}^{\nu}\frac{\partial q_j}{\partial q_i}-\frac{\partial \Phi_i}{\partial q_i}=0$$

$$\frac{\partial q_j}{\partial q_i}=0, \forall j \neq i \qquad \frac{\partial q_j}{\partial q_i}=1,\ j=i$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Find} \quad q_i \quad \text{from} \quad \Pi(q_1+\ldots+q_\nu)+q_i\dfrac{\partial \Pi}{\partial q_i}-\dfrac{\partial \Phi_i}{\partial q_i}=0 \\ \text{So} \quad P=MC_i(q_i)-q_i\dfrac{\partial \Pi}{\partial q_i}=MC_j(q_j)-q_j\dfrac{\partial \Pi}{\partial q_j}=\ldots, \forall i, j=1,\ldots,\nu \end{cases}$$

Linear Case

If $\quad P=a-bq=a-b(q_1+\ldots+q_\nu) \quad$ *then* $\quad \dfrac{\partial \Pi}{\partial q_i}=-b$

If all firms are identical and if $\quad MC_i=c \quad$ then $\quad P=c+b\dfrac{q}{\nu}$

Therefore $a-bq=c+b\dfrac{q}{\nu} \Rightarrow \begin{cases} q=\dfrac{\nu}{\nu+1}\dfrac{a-c}{b} \\ P=\dfrac{1}{\nu+1}a+\dfrac{\nu}{\nu+1}c \end{cases}$

Therefore price equal marginal cost when the number of firms tends to infinity

Υποθετικές Μεταβολές

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_i}=0 \Leftrightarrow \Pi(q_i+q_{\forall j\neq i})+q_i\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}+\frac{\partial \Pi}{\partial q_{\forall j\neq i}}\frac{\partial q_{\forall j\neq i}}{\partial q_i}\right)-\frac{\partial \Phi}{\partial q_i}=0$$

$$\frac{\partial q_{\forall j\neq i}}{\partial q_i}=\omega_i, \forall i \Rightarrow \begin{cases}\text{Find} \quad q_i \quad \text{from } \Pi(q_i+q_{\forall j\neq i})+q_i\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}+\frac{\partial \Pi}{\partial q_{\forall j\neq i}}\omega_i\right)-\frac{\partial \Phi}{\partial q_i}=0 \\ \text{and so} \quad P=MC_i - q_i\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}+\frac{\partial \Pi}{\partial q_{\forall j\neq i}}\omega_i\right)=MC_h - q_h\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_h}+\frac{\partial \Pi}{\partial q_{\forall j\neq h}}\omega_h\right)=\ldots, \forall i\end{cases}$$

Linear Case

If $\quad P=a-bq=a-b(q_1+\ldots+q_\nu)\quad$ *then* $\quad \frac{\partial \Pi}{\partial q_i}=-b$

If all firms are identical and if $\quad MC_i=c \quad$ then $\quad P=c+b(1+\omega)\frac{q}{\nu}$

Therefore $a-bq=c+b(1+\omega)\frac{q}{\nu} \Rightarrow \begin{cases} q=\frac{\nu}{\nu+(1+\omega)}\frac{a-c}{b} \\ P=\frac{(1+\omega)}{\nu+(1+\omega)}a+\frac{\nu}{\nu+(1+\omega)}c\end{cases}$

So $\ \omega=-1 \Rightarrow q={(a-c)}/{b} \wedge P=c \quad$ which is the perfect competition case

If $\ \omega=0$ we obtain the Cournot case and if $\omega>0$ we tend to the cartel case.

Υποθετικές Μεταβολές - παράδειγμα

Assume that the conjecture is about constant market share: $k_j = \dfrac{q_j}{\sum_i q_i}$

If $P = a - bq = a - b(q_1 + \ldots + q_\nu)$ *then* $\dfrac{\partial \Pi}{\partial q_i} = -b$ and $\dfrac{\partial q_j}{\partial q_i} = \dfrac{k_j}{1-k_j}$

If all firms are identical and if $MC_i = c$ then $P = c + \dfrac{b}{1-k_j}\dfrac{q}{\nu}$

Therefore $a - bq = c + \dfrac{b}{1-k_j}\dfrac{q}{\nu} \Rightarrow \begin{cases} q = \dfrac{\nu}{\nu + \dfrac{1}{1-k_j}}\dfrac{a-c}{b} \\ P = \dfrac{1/(1-k_j)}{\nu + 1/(1-k_j)}a + \dfrac{\nu}{\nu + 1/(1-k_j)}c \end{cases}$

Stackelberg

Assume that the first is leader and the $\nu-1$ are followers. The latter determine $q_i, i \neq 1$ by :

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_i} = 0 \Leftrightarrow \Pi(q_1 + \ldots + q_\nu) + q_i \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial q_i} = 0 \Leftrightarrow q_i = \Psi(q_1), \forall i \neq 1$$

The leader maximizes profit taking into account reactions Ψ of followers :

$$\underset{q_1}{Max} \quad \pi_1 = \Pi(q_1 + \ldots + q_\nu)q_1 - \Phi_1(q_1) \Leftrightarrow \Pi\left(q_1 + \sum_{\forall i \neq 1} \Psi(q_1)\right) + q_1 \frac{\partial \Pi}{\partial q_1} + q_1 \sum_{\forall i \neq 1} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \Upsilon(q_i)}{\partial q_1}\right) - \frac{\partial \Phi_1}{\partial q_1} = 0$$

$\Rightarrow$ Find q_1 from above equation and then q_i from $q_i = \Psi(q_1)$ So $P = \Pi\left(q_1 + \sum_{\forall i \neq 1} \Psi(q_1)\right)$

Linear Case

If $\quad P = a - bq = a - b(q_1 + \ldots + q_\nu) \quad$ *then* $\quad \dfrac{\partial \Pi}{\partial q_i} = -b$

If all firms are identical and if $\quad MC_i = c \quad$ then $q_i = \dfrac{1}{\nu} \cdot \dfrac{a\text{-}c}{b} - \dfrac{1}{\nu} q_1, \forall i \neq 1$ and $q_1 = \dfrac{\nu - 1}{\nu} \cdot \dfrac{a - c}{b}$

Therefore $\begin{cases} q = \dfrac{\nu - 1}{\nu} \dfrac{a - c}{b} \\ P = \dfrac{1}{\nu} a + \dfrac{\nu - 1}{\nu} c \end{cases}$ Notice that $\dfrac{\nu - 1}{\nu} < \dfrac{\nu}{\nu + 1}$ implying higher monopoly profit than Cournot

Μονοπωλιακός Ανταγωνισμός

Inverse demand function for good k depends on substitution : $P_k = f_k\left(q_k; q_l, \forall l \neq k\right)$

Each firm is a monopoly for one good but faces competition from substitution :

$$\underset{q_i}{Max} \quad \pi_i = f_i\left(q_i; q_j, \forall j \neq i\right) \cdot q_i - \Phi_i\left(q_i\right) \Leftrightarrow f_i\left(q_i; q_j, \forall j \neq i\right) + q_i \frac{\partial f_i}{\partial q_i} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial q_i} = 0, \forall i$$

which is a system of ν equations with unknowns $q_i, i = 1, \ldots, \nu$

Linear Case

$P_i = a - bq_i - d\sum_{j \neq i} q_j$ and firms identical : $q_i = q$ and $\dfrac{\partial \Phi_i}{\partial q_i} = c$ therefore

$P_i = a - \left[b + d \cdot (\nu - 1)\right] q_i$ and $\forall i : a - \left[b + d \cdot (\nu - 1)\right] q_i - bq_i - c = 0$

$$q_i = \frac{a - c}{2b + (\nu - 1)d} \quad \text{and} \quad P_i = \frac{b}{2b + (\nu - 1)d} a + \frac{b + (\nu - 1)d}{2b + (\nu - 1)d} c$$

which corresponds to monopoly profit lower than the cartel case

and even decreasing with ν.

Μοντέλο ηλεκτρικής αγοράς - 1

SETS

$s:$ electricity supply companies

$i, j:$ nodes of the transmission network with $Net(i, j) = \{(i, j)\,\text{exists}\}$

$g:$ power plants

UNKNOWN

$G(i, g, s):$ power generated at location i by plant g owned by company s

$Q(i,s):$ sales by company s to consumers located at i

$F(i, j, s):$ power flow from i to j for company s

DATA

$c(i, g, s):$ marginal cost of generation by plant g at i operated by company s

$w(i, j):$ marginal transmission charge for flow from i to j

$C(i, g, s):$ generation capacity of a plant

$T(i, j):$ transmission capacity from i to j

MODEL

each company maximizes its profit under Cournot competition, demand is satisfied, flows are balanced at each node, generatin and transmission capacities are respected.

Μοντέλο ηλεκτρικής αγοράς - 2

$$\underset{G,Q,F}{Max} \quad \pi(s) = \sum_i \left[\left(a_i - b_i \sum_{\bar{s}} Q(i,\bar{s}) \right) \times Q(i,s) \right] - \sum_i \sum_g \left[G(i,g,s) \times c(i,g,s) \right]$$

$$- \sum_i \sum_j \left[F(i,j,s) \times w(i,j) \right] \qquad \forall s$$

subject to:

$$Q(i,s) = \sum_g G(i,g,s) - \sum_j F(i,j,s) + \sum_j F(j,i,s) \qquad | \ \forall i \, \forall s \qquad a(i,s)$$

$$\sum_s F(i,j,s) - \sum_s F(j,i,s) \le T(i,j) \qquad | \ \forall i \, \forall j \qquad \tau(i,j)$$

$$G(i,g,s) \le C(i,g,s) \qquad | \ \forall i \, \forall g \, \forall s \qquad \kappa(i,g,s)$$

$$Q(i,s) \ge 0, G(i,g,s) \ge 0, \ F(i,j,s) \ge 0$$

Μοντέλο ηλεκτρικής αγοράς - 3

SOLVE THE COMPLEMENTARITY SYSTEM

$$-\left(a_i - b_i \sum_{\bar{s}} Q(i,\bar{s}) - b_i Q(i,s)\right) + a(i,s) \geq 0 \qquad | \ \forall i \, \forall s \qquad Q(i,s) \geq 0$$

$$c(i,g,s) - a(i,s) - k(i,g,s) \geq 0 \qquad | \ \forall i \, \forall g \, \forall s \qquad G(i,g,s) \geq 0$$

$$w(i,j) - a(i,s) + a(j,s) - \tau(i,j) + \tau(j,i) \geq 0 \qquad | \ \forall i \, \forall j \qquad F(i,j,s) \geq 0$$

$$Q(i,s) = \sum_g G(i,g,s) - \sum_j F(i,j,s) + \sum_j F(j,i,s) \qquad | \ \forall i \, \forall s \qquad a(i,s) \ free$$

$$\sum_s F(i,j,s) - \sum_s F(j,i,s) \leq T(i,j) \qquad | \ \forall i \, \forall j \qquad \tau(i,j) \geq 0$$

$$G(i,g,s) \leq C(i,g,s) \qquad | \ \forall i \, \forall g \, \forall s \qquad \kappa(i,g,s) \geq 0$$

AND THEN COMPUTE

$$P_i = a_i - b_i \sum_{\bar{s}} Q(i,\bar{s})$$

$$\pi(s) = \sum_i \left[P_i Q(i,s)\right] - \sum_i \sum_g \left[G(i,g,s) \times c(i,g,s)\right] - \sum_i \sum_j \left[F(i,j,s) \times w(i,j)\right] - K_s$$

Άσκηση

Στο πλαίσιο αγοράς πετρελαϊκού προϊόντος, η συνάρτηση αθροιστικής ζήτησης έχει τη μορφή $D(p) = ap^{\varepsilon}$ με p την τιμή του προϊόντος και $\alpha > 0$, $\varepsilon < 0$ γνωστές παράμετροι. Το προϊόν προσφέρεται από k ομοειδείς επιχειρήσεις η καθεμία των οποίων έχει συνάρτηση οριακού κόστους της μορφής $MC(q) = \beta q^{\zeta}$ όπου q η ποσότητα παραγωγής και $\beta > 0$, $\zeta > 0$ γνωστές παράμετροι.

1. Υπολογίστε την ποσότητα και την τιμή ισορροπίας στην περίπτωση που η αγορά είναι ανταγωνιστική, καθώς και την ποσότητα παραγωγής κάθε επιχείρησης.
2. Εάν ο αριθμός των ομοειδών επιχειρήσεων μειωθεί στο μισό, ποιες θα είναι οι επιπτώσεις στην ποσότητα, στην τιμή ισορροπίας και στα πλεονάσματα καταναλωτή, παραγωγού και στο κοινωνικό πλεόνασμα;
3. Έστω ότι οι k επιχειρήσεις συνεργάζονται μεταξύ τους σε καρτέλ. Ποια είναι η επίπτωση στην ποσότητα και στην τιμή ισορροπίας;
4. Ίδιο ερώτημα για την περίπτωση ανταγωνισμού κατά Cournot.
5. Συγκρίνατε και σχολιάσατε τα αποτελέσματα των ερωτήσεων 2,3 και 4 σχετικά με το επίπεδο των τιμών και την επίπτωση σε αυτές του αριθμού των επιχειρήσεων (k τείνοντας στο 1, k τείνοντας στο άπειρο).
6. Το Κράτος φορολογεί τα κέρδη των επιχειρήσεων του ερωτήματος 3 με αναλογικό συντελεστή τ_S και ταυτόχρονα επιδοτεί την τιμή του προϊόντος με συντελεστή τ_D. Ποιες θα είναι οι επιπτώσεις στη συνάρτηση ζήτησης, στη συνάρτηση προσφοράς, στην ποσότητα, στην τιμή ισορροπίας και στα έσοδα και έξοδα του Κράτους;
7. Το Κράτος προσδιορίζει τους συντελεστές φορολογίας και επιδότησης έτσι ώστε να έχει ισοσκελισμένο προϋπολογισμό για την παρέμβαση αυτή. Ποια θα είναι η σχέση μεταξύ των δύο αυτών συντελεστών και πώς καταστρώνεται το πρόβλημα της ισορροπίας;

<u>ημ.:</u>

- Σε κάθε περίπτωση οι επιχειρήσεις παραμένουν απολύτως ομοειδείς.
- Ζητούνται αναλυτικοί τύποι αποτελεσμάτων και σχολιασμός
- Ο προσδιορισμός των επιπτώσεων θα υπολογισθεί ως λόγος τιμών και ποσοτήτων ως προς τα αποτελέσματα της ανταγωνιστικής αγοράς. Σχολιάσατε εάν οι λόγοι αυτοί θα είναι κατά περίπτωση μεγαλύτεροι ή μικρότεροι της μονάδας
- Για τα πλεονάσματα υπολογίσατε απευθείας τη μεταβολή από την ανταγωνιστική αγορά

Κατάστρωση

Συνάρτηση Αθροιστικής Ζήτησης

$$Q = D(p) = \alpha\, p^{\varepsilon} \quad \alpha > 0, \varepsilon < 0$$

Συνάρτηση Οριακού Κόστος καθεμιάς Επιχείρησης

$$MC(q) = \beta\, q^{\zeta} \quad \beta > 0, \zeta > 0$$

Αριθμός απολύτως ομοειδών επιχειρήσεων: k (δεδομένος)

$$Q = \sum_{1}^{k} q = k \cdot q$$

Ανταγωνιστική Αγορά

Κάθε επιχείρηση μεγιστοποιεί το κέρδος της θεωρώντας ότι δεν μπορεί να επηρεάσει την τιμή ισορροπίας:

$$\max_{q} \quad Κέρδος \; = \; p \cdot q - \int_0^q \beta\, x^{\zeta}\, dx$$

$$\frac{\partial Κέρδος}{\partial q} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial (p\cdot q)}{\partial q} = \;\beta\, q^{\zeta} \;\Rightarrow p = \;\beta\, q^{\zeta}$$

$Η\ οποία\ προσδιορίζει\ τη\ συνάρτηση\ προσφοράς\ καθεμιάς\ επιχείρησης\!:\; q = s(p) = \left(\frac{p}{\beta}\right)^{1/\zeta}$

$Οπότε\ η\ αθροιστική\ συνάρτηση\ προσφοράς\ θα\ είναι:\;\; Q = S(p) = k \cdot s(p) = k \cdot \left(\frac{p}{\beta}\right)^{1/\zeta}$

$και\ η\ αντίστροφη\ συνάρτηση\ αθροιστικής\ προσφοράς\ είναι:\;\; p = \; S^{-1}(Q) = \; \beta \cdot \left(\frac{Q}{k}\right)^{\zeta}$

$Όμως\;\; p = \; D^{-1}(Q) \;\Rightarrow p = \left(\frac{Q}{\alpha}\right)^{1/\varepsilon}$

$Άρα\ το\ Q\ υπολογίζεται\ από\ την\ εξίσωση\!:\;\; p = \left(\frac{Q}{\alpha}\right)^{1/\varepsilon} = \; \beta \cdot \left(\frac{Q}{k}\right)^{\zeta}$

Ανταγωνιστική Αγορά

Αποτελέσματα:

$\Pi\alpha\rho\alpha\gamma\omega\gamma\acute{\eta}$: $Q = \alpha^{\frac{1}{1-\varepsilon\cdot\zeta}} \cdot \beta^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon\cdot\zeta}} \cdot k^{\frac{-\varepsilon\cdot\zeta}{1-\varepsilon\cdot\zeta}}$ *και καθεμιάς επιχείρησης* $q = \alpha^{\frac{1}{1-\varepsilon\cdot\zeta}} \cdot \beta^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon\cdot\zeta}} \cdot k^{\frac{-1}{1-\varepsilon\cdot\zeta}}$

$T\iota\mu\acute{\eta}$: $p = \alpha^{\frac{\zeta}{1-\varepsilon\cdot\zeta}} \cdot \beta^{\frac{1}{1-\varepsilon\cdot\zeta}} \cdot k^{\frac{-\zeta}{1-\varepsilon\cdot\zeta}}$

Πλεόνασμα Καταναλωτή: $CS = \int_0^Q \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{1/\varepsilon} dx - p \cdot Q$

Πλεόνασμα Παραγωγού: $PS = -\int_0^Q \beta \cdot \left(\frac{x}{k}\right)^{\zeta} dx + p \cdot Q$

Κοινωνικό Πλεόνασμα : $SS = CS + PS = \int_0^Q \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{1/\varepsilon} dx - \int_0^Q \beta \cdot \left(\frac{x}{k}\right)^{\zeta} dx$

Μείωση στο μισό του αριθμού επιχειρήσεων

Νέος Αριθμός απολύτως ομοειδών επιχειρήσεων: $k^{'} = \frac{k}{2}$

$$Νέα\ Παραγωγή:\ Q^{'} = \alpha^{\frac{1}{1-\varepsilon\cdot\zeta}} \cdot \beta^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon\cdot\zeta}} \cdot \left(\frac{k}{2}\right)^{\frac{-\varepsilon\cdot\zeta}{1-\varepsilon\cdot\zeta}} = 2^{\frac{\varepsilon\cdot\zeta}{1-\varepsilon\cdot\zeta}} \cdot Q \Rightarrow \frac{Q^{'}}{Q} = 2^{\frac{\varepsilon\cdot\zeta}{1-\varepsilon\cdot\zeta}} < 1\ γιατί\ \frac{\varepsilon\cdot\zeta}{1-\varepsilon\cdot\zeta} < 0$$

$$και\ καθεμιάς\ επιχείρησης\ \ q = \alpha^{\frac{1}{1-\varepsilon\cdot\zeta}} \cdot \beta^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon\cdot\zeta}} \cdot \left(\frac{k}{2}\right)^{\frac{-1}{1-\varepsilon\cdot\zeta}}$$

$$Νέα\ Τιμή:\ \ p^{'} = \alpha^{\frac{\zeta}{1-\varepsilon\cdot\zeta}} \cdot \beta^{\frac{1}{1-\varepsilon\cdot\zeta}} \cdot \left(\frac{k}{2}\right)^{\frac{-\zeta}{1-\varepsilon\cdot\zeta}} = 2^{\frac{\zeta}{1-\varepsilon\cdot\zeta}} \cdot p\ \ \Rightarrow \frac{p^{'}}{p} = 2^{\frac{\zeta}{1-\varepsilon\cdot\zeta}} > 1\ γιατί\ \frac{\zeta}{1-\varepsilon\cdot\zeta} > 0$$

Μεταβολή πλεονάσματος καταναλωτή

$$\Delta CS = -\int_{p}^{p^{'}} \alpha x^{\varepsilon}\, dx = -\frac{\alpha}{1+\varepsilon}\left((p^{'})^{1+\varepsilon} - p^{1+\varepsilon}\right) < 0,\ \ \forall \varepsilon < 0\ αφού\ \frac{p^{'}}{p} > 1$$

Μείωση στο μισό του αριθμού επιχειρήσεων

Μεταβολή πλεονάσματος παραγωγού

$$\Delta PS = \left[-\int_0^{Q'} \beta\cdot\left(\frac{x}{k}\right)^{\zeta} dx + p'\cdot Q'\right] - \left[-\int_0^{Q} \beta\cdot\left(\frac{x}{k}\right)^{\zeta} dx + p\cdot Q\right] =$$

$$= \left[p'\cdot Q' - \beta k \frac{\left({Q'}/{k}\right)^{\zeta+1}}{\zeta+1}\right] - \left[p\cdot Q - \beta k \frac{\left({Q}/{k}\right)^{\zeta+1}}{\zeta+1}\right] = p'\cdot Q' \frac{\zeta}{\zeta+1} - p\cdot Q \frac{\zeta}{\zeta+1}$$

$$= p\cdot Q \frac{\zeta}{\zeta+1}\left(2^{\frac{(1+\varepsilon)\zeta}{1-\varepsilon\cdot\zeta}} - 1\right) > 0\ \alpha\nu\ 1+\varepsilon > 0, = 0\ \alpha\nu\ 1+\varepsilon = 0, < 0\ \alpha\nu\ 1+\varepsilon < 0$$

Μεταβολή κοινωνικού πλεονάσματος

$$\Delta SS = \Delta CS + \Delta PS$$

$$= -\frac{\alpha}{1+\varepsilon}\left((p')^{1+\varepsilon} - p^{1+\varepsilon}\right) + p\cdot Q \frac{\zeta}{\zeta+1}\left(2^{\frac{(1+\varepsilon)\zeta}{1-\varepsilon\cdot\zeta}} - 1\right)$$

$$= -\frac{\alpha}{1+\varepsilon} p^{1+\varepsilon}\left(2^{\frac{(1+\varepsilon)\zeta}{1-\varepsilon\cdot\zeta}} - 1\right) + p\cdot Q \frac{\zeta}{\zeta+1}\left(2^{\frac{(1+\varepsilon)\zeta}{1-\varepsilon\cdot\zeta}} - 1\right)$$

$$= p\cdot Q \frac{-1+\varepsilon\zeta}{(1+\varepsilon)\cdot(1+\zeta)}\left(2^{\frac{(1+\varepsilon)\zeta}{1-\varepsilon\cdot\zeta}} - 1\right) < 0 \quad \forall \varepsilon < 0$$

Συνεργασία σε Καρτέλ

Μεγιστοποιείται το συνολικό κέρδος των επιχειρήσεων για να βρεθεί η ισορροπία:

$$\max_{Q} \quad Κέρδος \;=\; p\cdot Q - \int_0^Q \beta\cdot\left(\frac{x}{k}\right)^{\zeta} dx \;=\left(\frac{Q}{\alpha}\right)^{1/\varepsilon}\cdot Q - \int_0^Q \beta\cdot\left(\frac{x}{k}\right)^{\zeta} dx$$

$$\frac{\partial Κέρδος}{\partial Q} = 0 \;\Rightarrow\; \left(\frac{1}{\varepsilon}+1\right)\alpha^{\frac{-1}{\varepsilon}} Q^{\frac{1}{\varepsilon}} = \;\beta\cdot\left(\frac{Q}{k}\right)^{\zeta} \; \textit{που επιλύεται ως προς } Q$$

Αποτελέσματα:

$$\textit{Παραγωγή:}\; Q_{καρτελ} \;=\alpha^{\frac{1}{1-\varepsilon\cdot\zeta}}\cdot(\beta')^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon\cdot\zeta}}\cdot k^{\frac{-\varepsilon\cdot\zeta}{1-\varepsilon\cdot\zeta}}$$

$$\textit{και καθεμιάς επιχείρησης}\;\; q=\alpha^{\frac{1}{1-\varepsilon\cdot\zeta}}\cdot(\beta')^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon\cdot\zeta}}\cdot k^{\frac{-1}{1-\varepsilon\cdot\zeta}} \qquad \textit{όπου}\; \beta' \;=\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\beta$$

$$\textit{Τιμή:}\;\; p_{καρτελ} \;=\; \alpha^{\frac{\zeta}{1-\varepsilon\cdot\zeta}}\cdot(\beta')^{\frac{1}{1-\varepsilon\cdot\zeta}}\cdot k^{\frac{-\zeta}{1-\varepsilon\cdot\zeta}}$$

$$\textit{Άρα}\quad Q_{καρτελ} \;= Q_{ανταγ\,.}\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon\cdot\zeta}} \;\; \textit{το οποίο ορίζεται μόνο για } 1+\epsilon<0$$

$$\textit{οπότε}\; Q_{καρτελ} \;< Q_{ανταγ\,.}$$

$$\textit{και}\quad p_{καρτελ} \;= p_{ανταγ\,.}\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^{\frac{1}{1-\varepsilon\cdot\zeta}}$$

$$\textit{οπότε}\; p_{καρτελ} \;> p_{ανταγ\,.}$$

Ανταγωνισμός Cournot

Μεγιστοποιείται το κέρδος καθεμιάς επιχείρησης χωριστά και ταυτόχρονα για όλες τις επιχειρήσεις, η καθεμία εκ των οποίων θεωρώντας ως δεδομένες τις παραγωγές των άλλων επιχειρήσεων:

$$\max_{q} \;\; K\acute{\varepsilon}\rho\delta o\varsigma \; = \; p \cdot q - \int_0^q \beta\, x^{\zeta}\, dx \; = \left(\frac{\sum_1^k q}{\alpha}\right)^{1/\varepsilon} \cdot q - \int_0^q \beta\, x^{\zeta}\, dx$$

$$\frac{\partial K\acute{\varepsilon}\rho\delta o\varsigma}{\partial q} = 0 \;\Rightarrow \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\sum_1^k q}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}-1}\left(\frac{q}{\alpha}\right) + \left(\frac{\sum_1^k q}{\alpha}\right)^{1/\varepsilon} - \beta\, q^{\zeta} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{kq}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}-1}\left(\frac{q}{\alpha}\right) + \left(\frac{kq}{\alpha}\right)^{1/\varepsilon} - \beta\, q^{\zeta} = 0$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $\partial q_i / \partial q_j = 0 \;\; \forall i \neq j$

Η τελευταία επιλυόμενη ως προς q προσδιορίζει την παραγωγή καθεμιάς επιχείρησης:

$$q = \alpha^{\frac{1}{1-\varepsilon\cdot\zeta}} \cdot (\beta')^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon\cdot\zeta}} \cdot k^{\frac{-1}{1-\varepsilon\cdot\zeta}} \qquad \acute{o}\pi o\upsilon \; \beta' = \frac{\varepsilon k}{1+\varepsilon k}\beta$$

Ανταγωνισμός Cournot

Αποτελέσματα:

$\Pi\alpha\rho\alpha\gamma\omega\gamma ή$: $Q_{Cournot} = \alpha^{\frac{1}{1-\varepsilon\cdot\zeta}} \cdot (\beta')^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon\cdot\zeta}} \cdot k^{\frac{-\varepsilon\cdot\zeta}{1-\varepsilon\cdot\zeta}}$

$T\iota\mu ή$: $p_{Cournot} = \alpha^{\frac{\zeta}{1-\varepsilon\cdot\zeta}} \cdot (\beta')^{\frac{1}{1-\varepsilon\cdot\zeta}} \cdot k^{\frac{-\zeta}{1-\varepsilon\cdot\zeta}}$

$Ά\rho\alpha \quad Q_{Cournot} = Q_{\alpha\nu\tau\alpha\gamma} . \left(\frac{\varepsilon k}{1+\varepsilon k}\right)^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon\cdot\zeta}}$ $\tau o\ o\pi o ί o\ o\rho ί\zeta\varepsilon\tau\alpha\iota\ \mu ό\nu o\ \gamma\iota\alpha\ 1+\epsilon<0$

$o\pi ό\tau\varepsilon\ Q_{Cournot} < Q_{\alpha\nu\tau\alpha\gamma}$.

$\kappa\alpha\iota \quad p_{Cournot} = p_{\alpha\nu\tau\alpha\gamma} . \left(\frac{\varepsilon k}{1+\varepsilon k}\right)^{\frac{1}{1-\varepsilon\cdot\zeta}}$

$o\pi ό\tau\varepsilon\ p_{Cournot} > p_{\alpha\nu\tau\alpha\gamma}$.

Σύγκριση Τιμών Ισορροπίας

	Παραγωγή	Τιμή
Ανταγωνισμός	$Q = \alpha^{\frac{1}{1-\varepsilon\cdot\zeta}} \cdot \beta^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon\cdot\zeta}} \cdot k^{\frac{-\varepsilon\cdot\zeta}{1-\varepsilon\cdot\zeta}}$	$p = \alpha^{\frac{\zeta}{1-\varepsilon\cdot\zeta}} \cdot \beta^{\frac{1}{1-\varepsilon\cdot\zeta}} \cdot k^{\frac{-\zeta}{1-\varepsilon\cdot\zeta}}$
Καρτέλ	$Q = \alpha^{\frac{1}{1-\varepsilon\cdot\zeta}} \cdot (\beta')^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon\cdot\zeta}} \cdot k^{\frac{-\varepsilon\cdot\zeta}{1-\varepsilon\cdot\zeta}}$ $\acute{o}\pi o\upsilon\ \beta' = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\beta$	$p = \alpha^{\frac{\zeta}{1-\varepsilon\cdot\zeta}} \cdot (\beta')^{\frac{1}{1-\varepsilon\cdot\zeta}} \cdot k^{\frac{-\zeta}{1-\varepsilon\cdot\zeta}}$ $\acute{o}\pi o\upsilon\ \beta' = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\beta$
Cournot	$Q = \alpha^{\frac{1}{1-\varepsilon\cdot\zeta}} \cdot (\beta')^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon\cdot\zeta}} \cdot k^{\frac{-\varepsilon\cdot\zeta}{1-\varepsilon\cdot\zeta}}$ $\acute{o}\pi o\upsilon\ \beta' = \frac{\varepsilon k}{1+\varepsilon k}\beta$	$p = \alpha^{\frac{\zeta}{1-\varepsilon\cdot\zeta}} \cdot (\beta')^{\frac{1}{1-\varepsilon\cdot\zeta}} \cdot k^{\frac{-\zeta}{1-\varepsilon\cdot\zeta}}$ $\acute{o}\pi o\upsilon\ \beta' = \frac{\varepsilon k}{1+\varepsilon k}\beta$

Όταν $k = 1$ η ισορροπία Cournot ταυτίζεται με την ισορροπία Καρτέλ

Όταν $k > 1$ η ισορροπία Cournot αντιστοιχεί σε μεγαλύτερη ποσότητα παραγωγής και μικρότερη τιμή από την ισορροπία Καρτέλ, όμως σε μικρότερη ποσότητα παραγωγής και μεγαλύτερη τιμή από την ισορροπία ανταγωνισμού

Όταν $k \to \infty\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ \lim_{k\to\infty}\frac{\varepsilon k}{1+\varepsilon k} = 1$ οπότε $\beta' = \beta$ και η ισορροπία Cournot ταυτίζεται με την ισορροπία ανταγωνισμού

Φορολογία Καρτέλ

Η συνάρτηση ζήτησης αλλάζει και γίνεται:

$$Q = D(p) = \alpha \left(p(1-\tau_D)\right)^{\varepsilon} \quad \alpha > 0, \varepsilon < 0 \; \kappa\alpha\iota \; p = D^{-1}(Q) = \left(\frac{Q}{\alpha}\right)^{1/\varepsilon} \frac{1}{1-\tau_D}$$

Μεγιστοποιείται το συνολικό κέρδος των επιχειρήσεων για να βρεθεί η ισορροπία:

$$\max_{Q} \;\; K\acute{\varepsilon}\rho\delta o\varsigma \; = \left[p \cdot Q - \int_0^Q \beta \cdot \left(\frac{x}{k}\right)^{\zeta} dx\right](1-\tau_S)$$

$$= \left[\left(\frac{Q}{\alpha}\right)^{1/\varepsilon} \frac{1}{1-\tau_D} \cdot Q - \int_0^Q \beta \cdot \left(\frac{x}{k}\right)^{\zeta} dx\right](1-\tau_S)$$

$$\frac{\partial K\acute{\varepsilon}\rho\delta o\varsigma}{\partial Q} = 0 \;\Rightarrow\; \left[\left(\frac{1}{\varepsilon}+1\right)\alpha^{\frac{-1}{\varepsilon}} Q^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{1}{1-\tau_D} - \beta \cdot \left(\frac{Q}{k}\right)^{\zeta}\right](1-\tau_S) = 0 \; \pi o\upsilon \; \varepsilon\pi\iota\lambda\acute{\upsilon}\varepsilon\tau\alpha\iota \; \omega\varsigma \; \pi\rho o\varsigma \; Q$$

Φορολογία Καρτέλ

Αποτελέσματα:

$$\textit{Παραγωγή}:\ Q_{καρτελ\ ,φορολ\ .} = \alpha^{\frac{1}{1-\varepsilon\cdot\zeta}}\cdot(\beta')^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon\cdot\zeta}}\cdot k^{\frac{-\varepsilon\cdot\zeta}{1-\varepsilon\cdot\zeta}}\cdot(1-\tau_D)^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon\cdot\zeta}}\ \text{όπου}\ \beta' = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\beta$$

$$(1-\tau_D)^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon\cdot\zeta}} > 1\ \text{οπότε}\ Q_{καρτελ\ ,φορολ\ .} > Q_{καρτελ}$$

$$\textit{Τιμή}:\ p_{καρτελ\ ,φορολ\ .} = \alpha^{\frac{\zeta}{1-\varepsilon\cdot\zeta}}\cdot(\beta')^{\frac{1}{1-\varepsilon\cdot\zeta}}\cdot k^{\frac{-\zeta}{1-\varepsilon\cdot\zeta}}\cdot(1-\tau_D)^{\frac{\varepsilon\zeta}{1-\varepsilon\cdot\zeta}}$$

$$(1-\tau_D)^{\frac{\varepsilon\zeta}{1-\varepsilon\cdot\zeta}} > 1\ \text{οπότε}\ p_{καρτελ\ ,φορολ\ .} > p_{καρτελ}$$

$$\textit{Κέρδη προ φόρων}:\ \alpha^{\frac{1+\zeta}{1-\varepsilon\cdot\zeta}}\cdot(\beta')^{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon\cdot\zeta}}\cdot k^{\frac{-\zeta\cdot(1+\varepsilon)}{1-\varepsilon\cdot\zeta}}\cdot(1-\tau_D)^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon\cdot\zeta}}\cdot\frac{\varepsilon\cdot\zeta-1}{\varepsilon\cdot(1+\zeta)}$$

$$\textit{Κέρδη μετά φόρων}:\ \alpha^{\frac{1+\zeta}{1-\varepsilon\cdot\zeta}}\cdot(\beta')^{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon\cdot\zeta}}\cdot k^{\frac{-\zeta\cdot(1+\varepsilon)}{1-\varepsilon\cdot\zeta}}\cdot(1-\tau_D)^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon\cdot\zeta}}\cdot\frac{\varepsilon\cdot\zeta-1}{\varepsilon\cdot(1+\zeta)}(1-\tau_S)$$

Προϋπολογισμός Κράτους:

$$\alpha^{\frac{1+\zeta}{1-\varepsilon\cdot\zeta}}\cdot(\beta')^{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon\cdot\zeta}}\cdot k^{\frac{-\zeta\cdot(1+\varepsilon)}{1-\varepsilon\cdot\zeta}}\cdot(1-\tau_D)^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon\cdot\zeta}}\cdot\left[\frac{\varepsilon\cdot\zeta-1}{\varepsilon\cdot(1+\zeta)}\tau_S-(1-\tau_D)^{\frac{\varepsilon\cdot\zeta}{1-\varepsilon\cdot\zeta}}\cdot\tau_D\right]$$

Ισοσκελισμένος Προϋπολογισμός Κράτους

Πρέπει $\frac{\varepsilon\cdot\zeta-1}{\varepsilon\cdot(1+\zeta)}\tau_S-(1-\tau_D)^{\frac{\varepsilon\cdot\zeta}{1-\varepsilon\cdot\zeta}}\cdot\tau_D = 0$